

PETER SOEDOJO

AZAS-AZAS

# MEKANIKA ANALITIK



Gadjah Mada University Press

Versi Pdf Lengkapnya di [ipusnas.com](http://ipusnas.com)

# **AZAS-AZAS MEKANIKA ANALITIK**

Oleh  
**Dr. Peter Soedjo, B.Sc.**  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Gadjah Mada

**GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS**

**Hak Cipta © 2000 GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS**  
**P.O. Box 14, Bulaksumur, Yogyakarta 55281.**  
**E-mail: gmupress@mx1.ugm.ac.id**

**Cetakan pertama**

**Oktober 2000**

*Dilarang mengutip dan memperbanyak tanpa izin  
tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya  
dalam bentuk apa pun, baik cetak, photoprint,  
microfilm dan sebagainya.*

**1056.31.10.00**

Diterbitkan dan dicetak oleh:  
**GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS**  
Anggota IKAPI  
**00.01.008-C1E**

**ISBN 979-420-471-4**

## KATA PENGANTAR

Buku yang singkat dan padat ini dimaksudkan memberi gambaran yang utuh dan mendalam tentang landasan teoritik mekanika. Buku ini disusun dari catatan-catatan kuliah selama bertahun-tahun, yakni lebih dari 20 tahun, penulis memberi kuliah di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada.

Buku ini lebih mengutamakan aspek ke-azas-an daripada ke-teknik-an, dan amat cocok bagi calon fisikawan maupun peneliti fisika yang mendambakan kemampuan analitik.

Adapun sistematika penulisannya diatur bertahap dari yang paling fundamental dan sederhana ke yang lebih dikembangkan dan lebih rumit.

Akhir kata semoga buku ini menolong pemakai untuk memahami landasan pemikiran dalam mekanika serta merangsang yang lain untuk menuliskan buku yang semacam yang lebih sempurna dan lebih berdaya guna.

Penulis,  
Peter Soedjo

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	v
DAFTAR ISI .....	vii
PENDAHULUAN .....	1
BAB I    MEKANIKA TITIK MATERI .....	4
1. Kecepatan dan percepatan .....	5
2. Hukum-hukum Newton .....	7
3. Azas kekekalan tenaga mekanik .....	9
4. Gesekan .....	12
5. Gaya reaksi inersial dan gaya sentrifugal .....	13
6. Hukum Newton tentang gravitasi .....	14
7. Gerakan di dalam sistem koordinat berputar .....	15
8. Bandul Foucolt .....	18
9. Gaya sentral .....	23
10. Hukum-hukum Keppler dan gerakan oleh gaya gravitasi .....	26
BAB II    MEKANIKA SISTEM TITIK MATERI .....	32
1. Pusat massa dan azas kekekalan momentum .....	32
2. Tenaga kinetik sistem titik materi .....	34
3. Momentum rotasi, momen inersia dan tensor inersia sistem .....	35
4. Momen gaya sistem .....	37
5. Tumbukan .....	37
6. Hamburan .....	40
BAB III    MEKANIKA SISTEM MEKANIK .....	49
1. Definisi .....	49

2. Azas usaha semu .....	50
3. Azas D'Alembert .....	52
4. Persamaan Lagrange .....	53
5. Azas Hamilton .....	58
6. Persamaan Hamilton .....	61
7. Transformasi kanonik dan persamaan Hamilton-Jacobi .....	67
8. Variabel action dan variabel sudut .....	73
9. Azas action terkecil (least action principle) .....	75
10. Invariansi integral Poincare .....	77
11. Kurung Lagrange dan kurung Poisson .....	81
12. Rotasi kecil dan momentum rotasi dengan notasi kurung Poisson .....	82
13. Teorema Liouville .....	87
<b>BAB IV MEKANIKA BENDA TEGAR .....</b>	<b>90</b>
1. Definisi .....	90
2. Transformasi ortogonal dan teorema Euler .....	90
3. Rotasi sesaat dan tensor inersia .....	92
4. Elipsoida momental atau elipsoida inersial .....	97
5. Tenaga kinetik rotasi benda tegar .....	99
6. Persamaan gerak Euler .....	100
7. Sudut-sudut Euler dan gerakan giroskop .....	105
8. Parameter Cayley-Klein .....	115
<b>BAB V MEKANIKA RELATIVISTIK .....</b>	<b>122</b>
1. Transformasi Galilean .....	122
2. Percobaan Michelson-Morley .....	124
3. Transformasi Lorentz-Einstein .....	127
4. Transformasi kecepatan .....	130
5. Massa, tenaga, dan momentum relativistik .....	132
<b>BAB VI BEBERAPA CONTOH SOAL .....</b>	<b>136</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>184</b>
<b>INDEKS .....</b>	<b>185</b>

## PENDAHULUAN

Mekanika yang berawal sebagai ilmu yang mempelajari tentang gerakan, ternyata kemudian melandasi ilmu fisika khususnya dan ilmu pengetahuan alamiah umumnya.

Mekanika boleh dikatakan dimulai sejak Aristoteles (384 s.M. - 322 s.M.) memikirkan gerakan bintang-bintang mengelilingi bumi dengan bumi dianggap diam. Akan tetapi perumusan hukum mekanika baru dikemukakan lama sesudahnya, oleh Issac Newton (1642-1727). Issac Newton mengemukakan konsep gaya dan massa berkaitan dengan sifat inersial materi serta merumuskan hukum gravitasi dalam upayanya menjabarkan hukum-hukum astronomi yang diutarakan Johan Keppler (1571- 1630) secara empirik berdasarkan data-data astronomi gurunya Tycho Brahe (1546 – 1601).

Untuk masalah-masalah mekanika yang umumnya berupa sistem yang rumit, bukan titik materi belaka, dari hukum mekanika Newton itu dikembangkanlah kaidah-kaidah dan rumus-rumus yang berdaya guna, oleh antara lain Johan Bernoulli (1667 –1743), Jean Le Ron D'Alembert (1717 –1783), Joseph Louis Lagrange (1736 –1813), William Rowan Hamilton (1805 –1865).

Mekanika yang dikembangkan oleh para ilmuwan di atas disebut mekanika klasik yang karena sifat analitiknya juga dinamakan mekanika analitik dan disebut juga mekanika teoretik, yang mendasari mekanika statistik, mekanika gelombang, dan mekanika kuantum dalam fisika modern, dan untuk materi atau zarah berkecepatan amat tinggi, muncullah mekanika relativistik berdasarkan teori relativitas khusus yang dikemukakan Albert Einstein (1879 – 1955).

Adapun unsur-unsur penyusunan mekanika ialah ruang, waktu dan materi, di mana dibicarakan gerakan materi yaitu variasi tempat materi terhadap waktu, sehingga timbullah konsep-konsep kecepatan

dan percepatan dalam kinematika yakni bagian mekanika yang membahas sifat-sifat gerakan, serta kemudian konsep-konsep gaya, massa, tenaga kinetik, tenaga potensial, usaha, daya, dalam dinamika yakni bagian mekanika yang membicarakan penyebab gerakan juga.

Sebagaimana gerakan itu dimaksudkan terhadap sekitarnya, maka sifat gerakan dipelajari dengan memilih sistem koordinat terhadap mana gerakan dinyatakan, dan dalam banyak hal, tempat titik materi lebih baik dinyatakan dengan vektor yang dilukis dari pusat koordinat ke tempat titik materi, yang lalu disebut vektor koordinat ataupun vektor tempat atau vektor posisi  $\vec{r}$  misalnya. Dengan demikian kecepatan yang didefinisikan sebagai variasi tempat terhadap waktu dinyatakan sebagai vektor diferensial  $\vec{r}$  terhadap waktu yaitu  $\vec{v} = (d/dt) \vec{r} = \dot{\vec{r}}$  misalnya, dan percepatan yaitu diferensial kecepatan terhadap waktu dengan sendirinya ternyata sebagai  $\vec{a} = (d/dt) \vec{v} = (d^2/dt^2) \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$  misalnya.

Jelaslah bahwa dimensi kecepatan adalah dimensi panjang [l] dibagi dimensi waktu [t] sehingga satuannya misalnya meter / detik, sedangkan dimensi percepatan adalah dimensi kecepatan [v] dibagi dimensi waktu [t] yang berarti sama dengan dimensi panjang [l] dibagi kuadrat dimensi waktu [t]<sup>2</sup>, sehingga satuannya misalnya meter / detik<sup>2</sup>.

Ukuran banyaknya gerakan ditinjau dari usaha yang diperlukan untuk mengubah gerakan dapat dikatakan sebanding dengan kuantitas materi, yaitu massa materi, maupun kecepatan gerakan materi itu. Maka timbullah konsep impuls atau momentum yang didefinisikan sebagai massa kali kecepatan materi, yang dimensinya sudah tentu sama dengan dimensi massa [m] kali dimensi kecepatan [v].

Demikianlah secara umum sembarang besaran mekanika selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear besaran-besaran pokok panjang l, waktu t, dan massa m.

Pada hakekatnya mekanika memang mendasari ilmu fisika sebagaimana ternyata 3 di antara 7 besaran pokok fisika adalah ketiga besaran pokok mekanika tersebut.

Berdasarkan tingkat kerumitannya, pembicaraan mekanika



dimulai dengan mekanika titik materi, lalu dilanjutkan dengan mekanika sistem atau himpunan titik-titik materi, kemudian mekanika sistem mekanis, dan akhirnya mekanika benda tegar. Dalam mekanika sistem titik-titik materi kita kenal konsep pusat massa, gaya interaksi atau gaya dalam, serta azas kekekalan momentum, sedang dalam mekanika sistem mekanis kita jumpai total usaha oleh gaya dalam yaitu usaha dalam, yang sama dengan nol meskipun total gaya dalam yang sama dengan nol untuk sistem titik-titik materi, tidak selalu sama dengan nol untuk sistem mekanis. Adapun dalam mekanika benda tegar, gerakan rotasilah yang berperanan, bahkan gerakan translasi pun diterjemahkan sebagai gerakan rotasi, sehingga konsep momen inersia dan tensor inersia mengganti peranan massa dalam perumusan-perumusan dinamikanya.

Perlu diperhatikan bahwa yang dimaksud dengan titik materi atau titik massa bukanlah materi yang volumenya kecil sekali dan diabaikan, melainkan yang gerakan translasinya saja yang diperhitungkan, sebagaimana gerakan rotasi suatu titik tidaklah tampak dan tidak bermakna.

## **BAB 1**

# **MEKANIKA TITIK MATERI**

Hukum Newton, yang tak lain ialah hukum kelembaman massa, atau hukum inersial, yakni yang menyatakan bahwa karena massanya, titik materi bersikap memberikan reaksi atas perubahan keadaan gerakannya, yaitu yang lalu disebut reaksi inersial, merupakan hukum dasar yang melandasi pengembangan ilmu mekanika.

Titik materi, atau titik massa, bukannya dimaksudkan sebagai suatu titik dengan massa tertentu, melainkan materi atau benda di mana gerakannya yang ditinjau ialah yang translasi saja; gerakan rotasinya tidak diperhitungkan, yakni seolah-olah materi atau benda itu tidak berotasi, sebagaimana rotasi suatu titik tidak ada maknanya sebab titik dianggap tak memiliki bentuk dan volum.

Keadaan gerakan dikatakan tetap apabila diam kalau tadinya diam, atau bergerak dengan kecepatan tertentu, kalau tadinya memang demikian. Jadi gerakan dikatakan tetap apabila tidak dipercepat atau diperlambat. Perlambatan tak lain adalah percepatan negatif, yaitu yang menyebabkan kecepatannya berkurang. Karena kecepatan adalah suatu besaran vektor, yaitu kecuali mempunyai besar juga mempunyai arah, dan begitu pula vektor perubahannya, yang secara umum arahnya berbeda, maka pada umumnya percepatan tidak hanya mengubah besarnya kecepatan melainkan juga mengubah arah kecepatan itu, dan dapat terjadi bahwa percepatan itu hanya mengubah arah tanpa mengubah besarnya kecepatan.

Hukum inersial Newton lazim dikenal dalam bentuk hukum-hukum Newton ke I, II, dan III, dan melalui hukum yang ke II, dikemukakan konsep massa dan gaya. Di samping hukum inersial, Newton juga mengemukakan hukum tentang gravitasi.

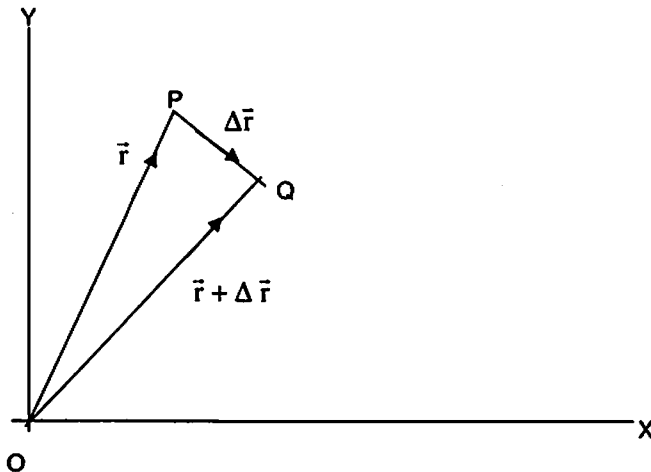
Terlebih dahulu kita hendak menegaskan apa yang kita maksud

dengan kecepatan dan percepatan, baru kemudian kita membahas hukum-hukum Newton sambil mendefinisikan besaran-besaran mekanika yang amat mendasar seperti gaya, massa, momentum, dan tenaga kinetik serta tenaga potensial.

## 1. KECEPATAN DAN PERCEPATAN

Ilmu pengetahuan alam yang paling mula-mula adalah gerakan. Gerakan tak lain ialah perpindahan tempat, yaitu perubahan tempat terhadap waktu. Keterangan selengkapnya tentang gerakan tentunya tidak hanya menyangkut perubahan tempat, melainkan juga selang waktu yang diperlukan untuk perubahan tempat tersebut, misalnya dinyatakan dengan perubahan tempat per satuan waktu, yang kemudian disebut kecepatan.

Untuk secara pasti menyatakan tempat suatu titik, kita dapat menyatakannya dengan koordinat-koordinatnya di dalam sistem koordinat Cartesian, atau dapat juga dengan menyatakannya dengan



Gambar I.1. Vektor tempat atau vektor koordinat.

suatu vektor yang pangkalnya di pusat koordinat O yang dipilih dan ujungnya di tempat di mana titik itu berada, misalnya di P, yakni  $\vec{OP} = \vec{r}$ , seperti yang dijelaskan di gambar I.1.

Seandainya titik materi itu bergerak dari P ke Q, maka vektor tempat atau vektor koordinatnya yang tadinya  $\vec{r}$  berubah misalnya menjadi  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  yakni  $\vec{OQ} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ . Kalau selang waktu terjadinya perubahan tempat ini adalah  $\Delta t$ , maka kita katakan bahwa kecepatan rata-rata selama selang waktu  $\Delta t$  itu, yaitu di antara P dan Q adalah

$$\vec{v}_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Apabila Q sangat dekat dengan P, maka kecepatan rata-rata di antara P dan Q itu menjelma menjadi kecepatan rata-rata di sekitar P atau boleh dikatakan kecepatan sesaat di P, yang diberikan oleh

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{dr}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Seperti halnya vektor tempat  $\vec{r}$  yang karena gerakan, merupakan fungsi t, maka begitu pula pada umumnya vektor kecepatan  $\vec{v}$  merupakan fungsi t, sehingga seperti di atas kita definisikan percepatan rata-rata.

$$\vec{a}_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dan percepatan sesaat

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Jelaslah bahwa vektor kecepatan adalah pada arah lintasan, atau

tepatnya pada arah menyinggung lintasan, sehingga berbeda dengan vektor tempat, vektor kecepatan tak tergantung pada pusat sistem koordinat yang dipilih dan demikian pula vektor percepatan.

## 2. HUKUM-HUKUM NEWTON

Pada dasarnya, hukum-hukum Newton adalah hukum inersial yang mengatakan bahwa materi atau benda cenderung mempertahankan keadaan geraknya, yang berarti cenderung tetap diam kalau tadinya diam, dan cenderung bergerak dengan kecepatan tetap tertentu kalau tadinya demikian. Ini tak lain ialah hukum Newton I.

Hal di atas berarti pula bahwa untuk mengubah gerakan diperlukan sesuatu, yang nantinya kita namakan gaya, untuk mengatasi reaksi inersial tersebut. Untuk memungkinkan merumuskan secara kuantitatif kita perlu menegaskan apa yang dimaksud dengan perubahan gerakan. Karena perubahan adalah menyangkut kuantitas, maka perubahan gerakan yang dimaksud, tepatnya adalah perubahan kuantitas gerakan.

Dari pengalaman sehari-hari, orang memerlukan kerja otot lengan untuk menggerakkan, mengangkat, ataupun mengubah keadaan gerakan benda. Kerja otot lengan itu hendak kita namakan gaya otot lengan. Makin besar gaya otot lengan dikenakan, makin mudah memperoleh perubahan gerakan, artinya gerakan itu lebih cepat berubah. Jadi secara umum gaya itu bersangkutan dengan laju perubahan kuantitas gerakan. Selanjutnya, dengan kuantitas benda yang lebih besar, diperlukan gaya yang lebih besar untuk menggerakkan, mengangkat ataupun mengubah gerakan benda itu. Kuantitas benda demikian hendak kita nyatakan dengan apa yang dinamakan massa. Lebih lanjut, perubahan gerakan berarti pula perubahan kecepatan, dan makin besar gaya dikenakan, makin besar pula laju perubahan kecepatan itu. Dengan demikian wajarlah kalau kuantitas gerakan kita nyatakan dengan besaran massa  $\times$  kecepatan, yang sedemikian hingga dengan massa tertentu, gaya yang diperlukan sebanding dengan laju perubahan kecepatan yang terjadi, dan untuk

memperoleh laju perubahan kecepatan tertentu, diperlukan gaya yang sebanding dengan massa benda. Hal ini berarti bahwa gaya adalah sedemikian hingga ada kesebandingan antara gaya dan laju perubahan kuantitas gerakan, atau secara matematis, dengan memilih satuan-satuan yang bersangkutan yang kita definisikan, kita dapat menulis.

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

yang tak lain ialah hukum Newton II. Definisi satuan-satuan itu adalah erg untuk gaya apabila satuan massanya gram dan satuan waktunya detik, dan satuan gaya itu Newton apabila satuan massanya kilogram dan satuan waktunya detik.

Dengan mengingat  $m$  yang tak tergantung waktu  $t$ , hukum Newton II dapat pula ditulis sebagai

$$F = ma$$

Kecuali itu besaran  $mv$  dapat kita rasakan dalam kita mengalami tumbukan. Tumbukan itu kita rasakan lebih besar sehingga misalnya kita lebih terpelanting, apabila massa benda ataupun kecepatan benda lebih besar. Maka mengingat tumbukan adalah peristiwa sesaat, maka besaran  $mv$  lalu dinamakan momentum.

Oleh karena kecepatan  $v$  adalah besaran vektor, maka demikian pula besaran momentum  $mv$  serta besaran gaya  $F$  sehingga lebih cermat hukum Newton II ditulis sebagai persamaan vektor.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{mv}) \text{ atau } \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

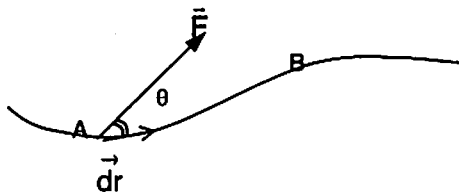
Hukum Newton yang menyatakan adanya reaksi inersial, sehingga diperlukan gaya untuk mengatasi reaksi inersial itu, mengisyaratkan adanya gaya-gaya interaksi. Kalau gaya yang dikenakan disebut suatu aksi dan gaya reaksi inersial kita sebut suatu reaksi, maka diperlukan suatu aksi yang sama dengan reaksi untuk mengatasi reaksi inersial atas pengubahan gerakan, dan pernyataan ini tak lain ialah hukum Newton III. Lebih lanjut, hukum Newton ke III ini diberi makna yang lebih luas, yaitu bahwa gaya-gaya adalah

interaktif sifatnya, artinya kalau A mengenakan gaya  $F$  pada B, maka pastilah B juga mengenakan gaya sebesar  $F$  pada A hanya saja arahnya berlawanan. Dalam fisika, hukum Newton III ini diberi makna yang lebih umum, yaitu untuk setiap aksi tentu timbul reaksi yang cenderung meniadakan aksi tersebut; misalnya dalam induksi elektromagnetik Faraday, perubahan flux magnetik yang dicakup suatu kumparan akan mengakibatkan timbulnya induksi e.m.f. yang memungkinkan pengaliran arus listrik yang lalu menimbulkan flux magnetik yang mengkompensasi perubahan flux tersebut.

### 3. AZAS KEKALKAN TENAGA MEKANIK

Dalam fisika, hukum-hukum kekekalan merupakan hukum-hukum yang fundamental, termasuk hukum kekekalan tenaga, di mana panas dan massa juga dipandang sebagai tenaga di samping tenaga mekanik yang berupa tenaga kinetik dan tenaga potensial.

Pada hakekatnya tenaga mekanik itu tidaklah kekal, melainkan semakin merosot akibat adanya gesekan yang mengubah sebagian tenaga mekanik menjadi panas. Jadi azas kekekalan tenaga mekanik hanya berlaku apabila adanya gesekan boleh diabaikan. Azas kekekalan tenaga mekanik itu mengatakan bahwa jumlah tenaga kinetik dan tenaga potensial adalah tetap, tak tergantung waktu. Azas kekekalan itu bukanlah hukum alam melainkan suatu teorema, dijabarkan berdasarkan definisi tenaga kinetik dan tenaga potensial, sebagai berikut.



Gambar I.2. Usaha dan tenaga kinetik

Kita tinjau suatu titik materi yang tengah bergerak dari A ke B di dalam medan gaya  $F$  yang besar dan arahnya tergantung tempat. Untuk jelasnya kita perhatikan gambar I.2.

Gaya  $\vec{F}$  yang efektif selama gerakan sepanjang  $\vec{dr}$ , hanyalah sebesar  $F \cos \theta$ , dan dikatakan bahwa usaha titik materi di bawah pengaruh gaya  $F$  dalam menempuh jarak  $dr$  itu adalah

$$dU = (F \cos \theta) dr \text{ atau dengan notasi vektor } dU = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Dengan demikian total usaha dari A ke B diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B \frac{d}{dt} (mv) \cdot \vec{dr} \\ &= m \int_A^B dv \cdot \frac{\vec{dr}}{dt} = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = K_B - K_A \end{aligned}$$

dengan  $v_B$  dan  $v_A$  ialah kecepatannya sewaktu di B dan di A, sedangkan  $K_B$  dan  $K_A$  ialah apa yang lalu kita definisikan sebagai tenaga kinetik di B dan di A. Tenaga kinetik ini boleh dipandang sebagai ukuran intensitas gerakan.

Jadi usaha yang telah dilakukan akan mengakibatkan penambahan tenaga kinetik. Dengan telah melakukan usaha, dikatakan bahwa potensi untuk melakukan usaha lebih lanjut berkurang sebanyak usaha yang telah dilakukan. Maka didefinisikan tenaga potensial  $V$  sedemikian hingga

$$V_A - V_B = U_{AB}$$

Dengan definisi tenaga kinetik dan tenaga potensial demikian, kita dapat menulis

$$K_B + V_B = K_A + V_A \text{ yang berarti } K + V = C$$



Dengan  $C$  ialah suatu tetapan yang tak tergantung waktu dan tempat, dan persamaan itu tak lain adalah perumusan azas kekekalan tenaga mekanik.

Berdasarkan azas kekekalan tenaga mekanik ini, sudah tentu usaha sepanjang lintasan keliling dari suatu titik kembali ke titik itu lagi adalah nol. Untuk medan gaya yang garis gayanya rotasional, yaitu sepanjang lintasan tertutup, yakni tak berujung-pangkal, usaha sepanjang lintasan keliling itu belum tentu nol. Jadi azas kekekalan tenaga hanya berlaku untuk medan gaya irrotasional yaitu tak rotasional. Contoh medan gaya rotasional adalah medan gaya magnetik.

Dari definisi tenaga potensial yang dapat dituliskan sebagai

$$-dV = dU$$

kita dapat menulis

$$-dV = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

yang berarti

$$F_x = -\partial V / \partial x \quad ; \quad F_y = -\partial V / \partial y \quad ; \quad F_z = -\partial V / \partial z$$

yang dapat dirangkum menjadi

$$\vec{F} = -\text{grad } V \quad \text{atau ditulis} \quad \vec{F} = -\nabla V \quad (2)$$

dengan

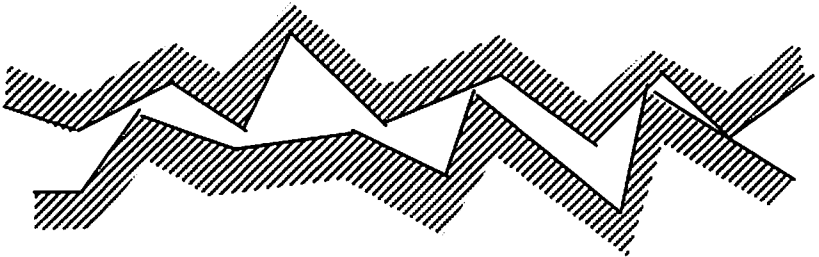
$$\nabla = i \partial / \partial x + j \partial / \partial y + k \partial / \partial z$$

ialah apa yang dinamakan operator diferensial vektor nabla Laplace di dalam sistem koordinat Cartesian dengan  $i, j, k$ , adalah vektor-vektor satuan sepanjang sumbu-sumbu koordinat  $X, Y, Z$ , dan grad adalah singkatan dari gradien.

Persamaan di atas secara fisis mengatakan bahwa gaya sebanding dengan intensitas kemerosotan tenaga potensial, seperti halnya debit arus air sebanding dengan grad ketinggian yakni intensitas kemerosotan ketinggian.

#### 4. GESEKAN

Dua permukaan benda yang bersinggungan akan saling mengenakan gesekan, yakni saling mengenakan gaya gesekan, apabila kedua benda itu bergerak satu terhadap yang lain. Hal ini disebabkan oleh kekasaran yaitu ketidak-rataan kedua permukaan sehingga gerakannya terhalang oleh runcingan-runcingan satu permukaan yang masuk ke lekukan-lekukan permukaan yang lain, seperti dijelaskan oleh gambar I.3.



Gambar I.3. Mekanisme gesekan dua permukaan

Dengan demikian diperlukan gaya untuk memaksakan runcingan-runcingan melintas lekukan-lekukan. Makin rapat persinggungan itu, makin menancap runcingan-runcingan ke lekukan-lekukan sehingga makin besar hambatan gerakannya. Jadi makin besar gaya tekan antar kedua permukaan, makin besar gaya gesekannya, dan kenyataannya gaya gesekan itu sebanding dengan gaya normal, yaitu gaya tekan antara kedua permukaan, atau dirumuskan

$$F_g = \mu N$$

Di mana  $\mu$  ialah tetapan kesebandingan antara gaya gesekan  $F_g$  dengan gaya normal  $N$ , dan dikenal dengan nama koefisien gesekan yang tergantung pada kekasaran permukaan.

- Pada hekekatnya gesekan mengakibatkan transfer tenaga kinetik benda yang bergesekan ke tenaga vibrasi atau getaran atoom-atoom di

kedua permukaan benda-benda yang bergesekan itu. Peningkatan tenaga vibrasi atoom-atoom itu akan teramati sebagai kenaikan suhu yang menurut teori equipartisi tenaga, tenaga vibrasi sebanding dengan suhunya dalam  $^{\circ}\text{K}$ , dalam bentuk misalnya

$$E = 3/2 kT$$

di mana  $k$  ialah apa yang disebut tetapan Boltzmann. Jadi berdasarkan gejala transfer tenaga demikian dapat dimengerti terjadinya desipasi tenaga mekanik menjadi panas serta adanya kesetaraan antara tenaga mekanik dengan panas, yang menurut pengukuran ternyata 1 joule setara dengan 0,24 kalori.

Oleh karena tumbukan juga dapat lebih menggetarkan atoom-atoom di tempat tumbukan, sehingga dapat dimengerti mengapa akibat tumbukan juga terjadi pemanasan, yakni desipasi tenaga menjadi panas.

Mengingat kesetaraan antara tenaga mekanik dan panas itu, dengan menyatakan panas yang timbul akibat desipasi tenaga dengan tenaga yang setara dengannya, kita dapat menulis.

$$K + V + JQ = \text{tetap (tak tergantung tempat dan waktu)}$$

Di mana  $J$  ialah nilai kesetaraan 1 joule/0,24 kalori di atas dan  $Q$  ialah banyaknya panas yang timbul dalam kalori. Persamaan di atas tak lain adalah perumusan hukum kekekalan tenaga yang dalam termodinamika mewujudkan sebagai hukum termodinamika ke I, yang merupakan hukum yang fundamental di alam, meskipun rumus di atas perlu dimodifikasi untuk gerakan yang relativistik.

## 5. GAYA REAKSI INERSIAL DAN GAYA SENTRIFUGAL

Keberadaan gaya reaksi inersial dapat diamati atau dirasakan dari misalnya kenyataan bahwa penumpang mobil terpental ke depan sewaktu mobil diperlambat, dan terpental ke belakang sewaktu mobil dipercepat, serta terpental ke samping sewaktu mobil membelok. Perubahan gerakan mobil itu menimbulkan gaya reaksi inersial yang

cenderung melawan perubahan gerakan tersebut.

Gaya reaksi inersial, tidak berasal dari suatu sumber gaya manapun, dan dengan sendirinya tidak memenuhi hukum Newton ke III.

Gaya sentrifugal adalah juga gaya reaksi inersial atas pemaksaan gerakan melingkar. Untuk mengatasi gaya reaksi inersial itulah diperlukan gaya sentripetal. Bahwa gaya sentrifugal bukan reaksi atas gaya sentripetal, dapat ditunjukkan dengan terpelantingnya batu yang diikatkan di ujung tali yang diputar melingkar sewaktu tali mendadak putus. Seandainya gaya sentrifugal itu adalah reaksi atas gaya sentripetal, maka sewaktu tali itu putus gaya sentrifugal itu mendadak nol sebab pada saat itu gaya sentripetal juga nol, sehingga tentunya batu akan terpelanting pada arah menyinggung lingkaran lintasan semula. Tetapi kenyataannya arah terpelantingnya batu lebih ke arah radial.

## 6. HUKUM NEWTON TENTANG GRAVITASI

Dalam usahanya menerangkan secara teori hukum-hukum empiri Kepler dalam astronomi, di samping mengemukakan hukum-hukum pokoknya ke I, II, dan III, Newton juga mengemukakan hukumnya tentang gravitasi yang mengatakan bahwa antara materi-materi di alam raya ini ada gaya tarik menarik, yang lalu dinamakan gaya gravitasi, yang besarnya sebanding dengan massa masing-masing materi yang tarik menarik, serta berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antara keduanya, dengan tetapan kesebandingan yang universal, artinya tak tergantung waktu, tempat, dan jenis materi. Dengan singkat hukum itu terumuskan sebagai

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3)$$

di mana  $m_1$  dan  $m_2$  ialah massa masing-masing materi,  $r$  adalah jarak antara kedua materi dan  $G$  ialah tetapan universal yang dinamakan

tetapan gravitasi, yang ternyata besarnya adalah

$$G = 6,67 \times 10^{-3} \text{ dyne cm}^2/\text{gram}^2$$

Berat benda tak lain adalah gaya gravitasi antara benda itu dengan bumi, yang dengan menuliskan  $m_1 = m$  sebagai massa benda dan menyatakan  $m_2$  sebagai massa bumi,  $M$  serta mengambil  $r$  sama dengan jarak antara pusat benda dengan pusat bumi sebagaimana dapat dibuktikan memang demikian, berat benda  $B$  dapat ditulis dalam bentuk

$$B = mg$$

di mana  $g$  ialah suatu percepatan yang dinamakan percepatan gravitasi, yang tak lain percepatan yang diperoleh benda akibat gaya tarik bumi, dan diberikan oleh

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

yang nilainya di dekat permukaan bumi berkisar antara 975 cm/detik<sup>2</sup> sampai 980 cm/detik<sup>2</sup>.

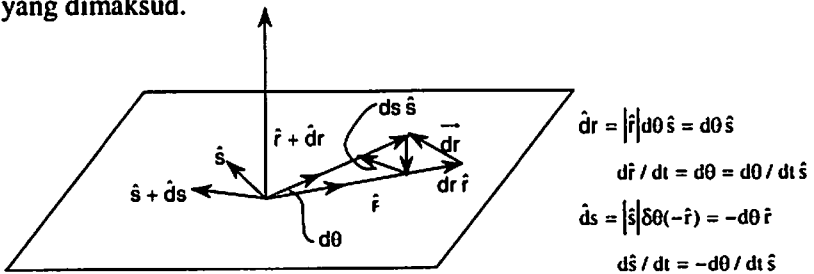
Oleh karena bumi memipih ke arah equator atau katulistiwa, maka di dekat equator, jarak antara tempat di permukaan bumi dari pusat, yaitu  $r$ , lebih besar daripada yang di dekat kutub, sehingga di samping tergantung tinggi tempat dari permukaan bumi, percepatan gravitasi tergantung pula pada lintang tempat, di mana di daerah katulistiwa percepatan gravitasi itu lebih kecil daripada yang di daerah dekat kutub.

## 7. GERAKAN DI DALAM SISTEM KOORDINAT BERPUTAR

Oleh karena bumi berputar mengelilingi sumbunya, maka sistem koordinat di permukaan bumi merupakan sistem koordinat yang berputar mengikuti perputaran bumi, sehingga di dalam sistem koordinat itu hukum Newton tidak berlaku. Dengan demikian

seandainya hukum Newton hendak diberlakukan, koreksi-koreksinya perlu di perhitungkan.

Sebagaimana gerakan di bawah gaya sentral dapat dibuktikan koplanar, artinya di dalam suatu bidang datar tertentu, jadi dalam sistem koordinat dua dimensi, maka kita hendak mempelajari secara analitik gerakan di dalam sistem koordinat polar, di mana gerakan itu dapat diuraikan menjadi komponen-komponen radial dan tegaklurus radial atau komponen tangensial, sejalan dengan terbawa melingkar-nya benda-benda di permukaan bumi oleh berputarnya bumi. Gambar 1.4 memperlihatkan diagram gerakan di dalam sistem koordinat polar yang dimaksud.



Gambar 1.4 Gerakan di dalam sistem koordinat polar

Dengan vektor-vektor satuan  $\hat{r}$  sepanjang arah radial dan  $\hat{s}$  sepanjang arah tegaklurus radial, vektor koordinat yang menyatakan letak titik materi  $\vec{r}$ , kecepatannya  $\vec{v}$ , dan percepatannya  $\vec{a}$  dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= d\vec{r} / dt = (dr / dt)\hat{r} + r(d\hat{r} / dt) \\ \vec{a} &= d\vec{v} / dt = (d^2r / dt^2)\hat{r} + (dr / dt)(d\hat{r} / dt) + \\ &\quad (dr / dt)(d\hat{r} / dt) + r(d^2\hat{r} / dt^2)\end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan penulisan,  $d/dt$  kita ganti dengan notasi titik di atas, misalnya  $dr/dt$  hendak kita tulis sebagai  $\dot{r}$ , sehingga dengan rumus untuk  $\vec{dr}/dt$  dan  $\vec{ds}/dt$  yang dijelaskan di gambar 1.3 kita

rumuskan

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + \omega r\hat{s} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - \omega^2 r)\hat{r} + (2\dot{\omega}r + \dot{\omega}r)\hat{s}\end{aligned}\quad (4)$$

di mana  $\omega$  adalah kecepatan sudut  $\dot{\theta}$ .

Untuk gerakan melingkar beraturan,  $\omega = \text{tetap}$  sehingga  $\dot{\omega} = 0$ , dan  $r = \text{tetap}$  sehingga  $\dot{r} = 0$  dan  $\ddot{r} = 0$ , kita dapatkan

$$\vec{a} = -\omega^2 r\hat{r}$$

yang tak lain ialah percepatan sentripetal yang arahnya menuju ke pusat koordinat.

Bagi titik materi yang bergerak melingkar beraturan sambil radial beraturan, dengan memasukkan  $\ddot{r} = 0$  dan  $\dot{\omega} = 0$ , percepatannya akan terumuskan sebagai

$$\vec{a} = -\omega^2 r\hat{r} + 2\dot{\omega}r\hat{s}$$

Suku kedua ruas kanan persamaan di atas dikenal sebagai percepatan koriolis yang menerangkan membeloknya angin pasat dari daerah sedang ke katulistiwa ke arah barat, oleh adanya reaksi inersial.

Dengan mendefinisikan vektor kecepatan sudut  $\vec{\omega}$  sebagai vektor yang tegaklurus bidang gerakan perputaran dan pada arah Bergeraknya sekrup kalau sekrup itu diputar menurutkan perputaran gerakan titik materi, sehingga

$$\begin{aligned}\text{arah } \omega &\text{ sama dengan arah } \hat{r} \times \hat{s} \\ \text{arah } \hat{s} &\text{ sama dengan arah } \vec{\omega} \times \hat{r} \\ \text{arah } \hat{r} &\text{ sama dengan arah } -\vec{\omega} \times \hat{s} \text{ sama dengan} \\ \text{arah } -\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \hat{r}\end{aligned}$$

kedua persamaan gerak di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \vec{a}^* + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (5)$$

di mana  $\vec{v}^* = \dot{r}\hat{r}$  dan  $\vec{a}^* = \ddot{r}\hat{r}$  ialah kecepatan dan percepatan di dalam sistem koordinat yang berputar menurutkan perputaran  $\hat{r}$  dan  $\hat{s}$ , yang

berbeda dengan vektor koordinat, tidak tergantung pusat koordinatnya.

Demikianlah maka percepatan gravitasi  $\vec{g}$  akan teramati di permukaan bumi sebagai

$$\vec{g}^* = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}^* - \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}) \quad (6)$$

Suku kedua ruas kanan mencerminkan efek koriolis sedangkan suku ketiga ruas kanan tak lain ditimbulkan oleh efek sentrifugal. Efek sentrifugal itu dengan mengingat  $\omega = 2\pi/24$  jam dan jari-jari bumi  $r = 6,33 \times 10^3$  kilometer, akan sebesar  $3,38 \text{ cm/detik}^2$  yang kiranya dapat diabaikan terhadap  $\vec{g}^*$  yang sebesar sekitar  $980 \text{ cm/detik}^2$  itu.

Dengan mengabaikan efek sentrifugal, tetapi dengan memperhitungkan efek koriolis, persamaan gerak benda jatuh yaitu di bawah gaya gravitasi akan terkoreksi menjadi

$$\begin{aligned} \vec{a}^* &= \vec{g}^* = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}^* \\ \vec{v}^* &= \int \vec{a}^* dt = \vec{v}_0^* + \vec{g}t - \int 2\vec{\omega} \times \vec{v}^* dt \\ &= \vec{v}_0^* + \vec{g}t - \int 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_0^* + \vec{g}t - \int 2\vec{\omega} \times \vec{v}^* dt) dt \\ &\approx \vec{v}_0^* + \vec{g}t - 2\vec{\omega} \times \left( \vec{r}_0^* + \vec{v}_0^* t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right) \end{aligned}$$

yang dengan mensubstitusikannya ke persamaan untuk  $\vec{a}^*$  di atas memberikan

$$\vec{a}^* = \vec{g}^* = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_0^* + \vec{g}t)$$

Selanjutnya pengintegralan persamaan untuk  $\vec{v}^*$  di atas akan memberikan

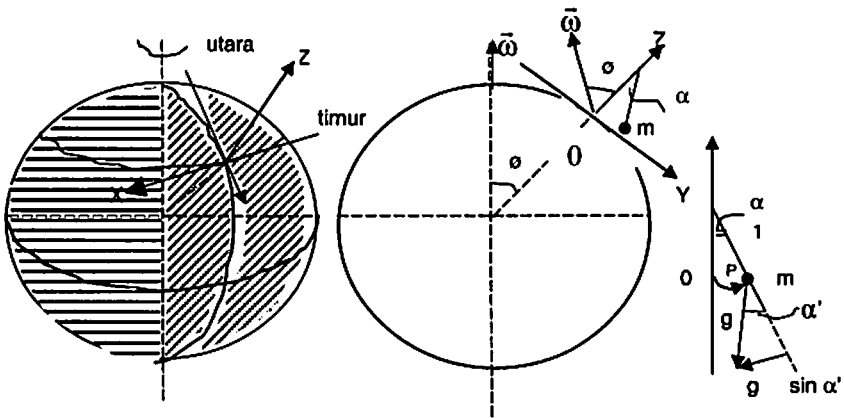
$$\vec{r}^* = \vec{r}_0^* + \vec{v}_0^* t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - 2\vec{\omega} \times \left( \vec{r}_0^* + \frac{1}{2} \vec{v}_0^* t^2 + \vec{g} t \frac{3}{6} \right)$$

## 8. BANDUL FOUCOLT

Pada tahun 1851 Foucolt melakukan percobaan untuk meyakinkan



kan adanya rotasi bumi pada porosnya, dengan bandul yang cukup berat yang digantungkan pada tali panjang, agar dapat bertahan berayun-ayun cukup lama. Oleh rotasi bumi, tentunya bandul akan berosilasi sambil berotasi karena seolah-olah tertinggal oleh rotasi bumi. Untuk menyelidiki gerakan bandul yang memperlihatkan adanya rotasi itu, kita tinjau bandul yang dipasang di daerah yang lintang tempatnya misalnya  $\phi$ . Demi jelasnya kita perhatikan gambar I.5.



Gambar 1.5 Efek koriolis terhadap osilasi bandul

Marilah kita ambil sistem koordinat dengan sumbu X pada arah timur-barat, sumbu Y pada arah utara-selatan, dan sumbu Z pada arah vertikal ke atas. Suatu bandul yang massanya  $m$  berayun-ayun atau berosilasi di sekitar titik setimbang  $O$  dan letak sesaat bandul terhadap  $O$  dinyatakan oleh vektor  $\vec{p}$ . Gaya yang menggerakkan bandul sudah tentu adalah komponen gaya berat yang pada arah tegak lurus tali bandul, ke  $O$ .

Karena jarak bandul ke pusat bumi jauh melebihi panjang tali  $l$ , maka  $\alpha' \approx \alpha$  dan untuk  $\alpha$  yang cukup kecil, kita dapat menulis

$$\sin \alpha = \rho/l$$